Mathématiques	*Devoir de Synthèse N°2*	
Lycée Ghannouch		
4ème Math Date **: le 05 /02/2013**	**Durée : 4 heures** **Coefficient : 4**	**Prof : Taieb**

Exercice n°1 :(2points)

Répondre par vrai ou faux **en justifiant votre réponse :**

1) Soit $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx$ pour tout entier naturel n.

   a) $I_1 = \ln(e+1)$

   b) $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n}(e^n - 1)$

2) On a rapporté le plan à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit (Γ) la parabole d'équation réduite $y^2 = 4x$

   a) La tangente à (Γ) au point A (1,2) à pour équation : x + y +1 =0

   b) L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

   On désigne par C = {M(x,y)∈ (Γ) tel que $0 \leq x \leq 2$ et $y \geq 0$ }

Le volume V du solide S obtenu par rotation de C au tour de l axe (Ox) est V = 8π

Exercice n°2 : (5 points)

L'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On donne les points A (1, 1,0), B (0, 1,1), C (1, -1,-1) et D (1,-1,1)

1-a) Montrer que les points A, B et C déterminé un plan P

b) Calculer le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

c) En déduire qu'une équation cartésienne de plan P est : 2 x- y+ 2 z-1=0.

d) Calculer l'aire de triangle ABC.

2- a) Calculer le volume de tétraèdre ABCD

b) En déduire la distance de D au plan P

3- Soit S l'ensemble des points M(x, y, z) tel que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 2z - 4 = 0$

a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon

b) Montrer que l'intersection de la sphère S et du plan P est un cercle ζ . Déterminer les coordonnées du centre H et le rayon r du cercle ζ

4- Soit h l'homothétie de centre D et de rapport -3

a) Déterminer l'expression analytique de h

b) Déterminer une équation cartésienne de S' et Q les images respective de S et P par h

c) Etudier l'intersection de S' et Q

Exercice n°3 : (3 points)

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $\sqrt{2}i$, $-2+2i$ et $2i$.

1. On considère l'application

$$S : \begin{array}{l} P \longrightarrow P \\ M(z) \longrightarrow M_1(z_1) \quad \text{tel que } z_1 = \left(\frac{-1+i}{2}\right)z + 1 + i \end{array}$$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.

2. Soit f la similitude directe qui transforme A en B et O en C .

a. Montrer que pour tout point M (z), d'image M'(z') par f, on a $z' = \sqrt{2}\,iz + 2i$.

b. En déduire les éléments caractéristiques de f

c. Montrer que $f \circ f$ est une homothétie que l'on caractérisera.

3.a. Déterminer l'affixe du point S(C).

b. Montrer que $S \circ f$ est une rotation que l'on caractérisera.

Exercice n°4 : (6 points)

I) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x\ln x}{x+1}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

1) a) Montrer que f est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

2) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x + 1 + \ln x$.

a) Etudier les variations de g sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$

et que $0{,}27 < \alpha < 0{,}28$.

c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$.

3) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

a) Ecrire une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 1.

b) Tracer T et (C) en précisant les branches infinies de (C).

II) Soit la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x) = \int_1^{2x} f(t)dt$

1) Montrer que F est dérivable sur IR_+ et calculer $F'(x)$.

2) Soit $x \geq 0$

a) Montrer que pour tout réel t de $[1,x]$; $\frac{1}{2}\ln t \leq f(t) \leq t\ln t$.

b) Calculer les intégrales $\mathrm{I}(x) = \int_1^{2x} \ln t \, dt$ et $\mathrm{J}(x) = \int_1^{2x} t \ln t \, dt$

c) En déduire que $x\, ln(2x) - x + \frac{1}{2} \leq \mathrm{F(x)} \leq 2x^2 \ln(2x) - x^2 + \frac{1}{4}$.

d) Déterminer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{F}(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\mathrm{F}(x)}{x}\right)$.

3) On donne $\mathrm{F}(0) \approx 0{,}2$. Dresser le tableau de variation de F et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

Exercice n° 5 : (4 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathbf{I}_n = \int_1^e \frac{(lnx)^n}{x^2} dx$.

1) 3) a) montrer à l'aide d'une intégration par partie que $\mathbf{I}_1 = 1 - \frac{2}{e}$.

b) Montrer que la suite $(\mathbf{I}_n)$ est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in [1, e]$ on a :

$$\frac{(lnx)^n}{xe} \leq \frac{(lnx)^n}{x^2} \leq \frac{(lnx)^n}{x}$$

b) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(n+1)e} \leq \mathbf{I}_n \leq \frac{1}{(n+1)}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{I}_n$

3) a) montrer à l'aide d'une intégration par partie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*:

$$\mathbf{I}_{n+1} = (n+1)\mathbf{I}_n - \frac{1}{e}$$

b) montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n!}\mathbf{I}_n = 1 - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Bon Travail